Kolokwium poprawkowe z Analizy Matematycznej I.1 2022/23
20 lutego 2023, 9.00-12.00

Za rozwiązanie każdego z zadań 1-4 można uzyskać 10 punktów. Rozwiązanie każdego zadania należy oddać **na osobnej kartce, podpisanej** *swoim imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu, a także nazwiskiem prowadzącego ćwiczenia lub numerem grupy ćwiczeniowej. Rozwiązania* **należy szczegółowo uzasadnić**, *powołując się na fakty znane z wykładu bądź z ćwiczeń.*

Zadanie 1. [10 punktów] Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$3 \cdot \left(\frac{3n}{e}\right)^n < 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1).$$

Zadanie 2. [10 punktów] Zbadaj istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 1\right)^n$$

Zadanie 3. [10 punktów] Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{n^2+1}\,.$$

w zależności od wartości parametru $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. [10 punktów] Funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki $f(966) + f(1057) < 2023 < f(1410) + f(613)$. Wykaż, że istnieją liczby rzeczywiste a, b takie, że $f(a) + f(b) = a + b - 2023$